رسم گره کند طبل قناس

با استفاده از روش‌های ابداعی پارامتریک[1]

محمدرضا اولیا[4]
استادیار دانشکدهٔ هنر و معماری، دانشگاه یزد

بیتا حاجبی[2]

رضا ابوئی[5]
دانشیار دانشکدهٔ حفاظت و مرمت، دانشگاه هنر اصفهان

احمد امین‌پور[3]
استادیار دانشکدهٔ معماری و شهرسازی، دانشگاه هنر اصفهان

کلیدواژگان: پارامتریک، شبکه‌های چندضلعی، نقوش، هندسه.

چکیده

محاسبات و ترسیم و ایجاد الگوهای نقوش هندسی در گذشته از سوی استادکاران انجام می‌شده و از نسلی به نسلی سینه به سینه منتقل و گاهی مفقود و یا به دست فراموشی سپرده شده است. به طوری‌که بعضاً طراحی گره‌های جدید و یا مرمت گره‌های آسیب‌دیدهٔ تاریخی برای اکثر دست‌اندرکاران کنونی ساخت و مرمت گره چه در کاشی‌کاری و چه نجاری و صنایع دیگر کاری دشوار است.

برای رفع این مشکل نگارندگان با مطالعهٔ نقوش هندسی و تدقیق در روابط ریاضی و مثلثاتی خطوط بین آن‌ها روش‌های جدید پارامتریک را ابداع و پیشنهاد می‌کنند که با تغییر پارامترها می‌توان خروجی‌های مختلفی از یک فرمول را دید. به‌نوعی می‌توان گفت که با استفاده از طراحی پارامتریک می‌توان از رایانه انتظار نوآوری داشت و به نقوشی دست یافت که در ذهن ما قبل از این نبوده است.

به منظور حصول اطمینان از جواب‌دهی این روش‌های نوینْ گره کند طبل قناس مطالعه و طراحی شد. با روش‌های پارامتریک جدید در این مقالهْ رسم نقوش هندسی اعم از سنتی و جدید و همچنین مرمت نقوش هندسی سنتی آسیب‌دیده در ابنیه تاریخی امکان پذیر است.

در این مقاله سؤال اصلی این است که چگونه می‌توان به راهکارهای دیگری غیر از ترسیم گره به روش‌های معمول سنتی دست یافت که امکان رسم گره‌های جدید و متنوع را فراهم کند. هدف از این پژوهش یافتن راه‌های تازه برای رسم و مرمت گره‌ها است. مطالعهٔ این پژوهش تحلیلی- قیاسی و روش آن یافته‌اندوزی، جستجو در روابط ریاضی و هندسی و مثلثاتی خطوط گره، به دست آوردن الگوریتم مناسب برای برنامه‌نویسی و رسم گره، و درنهایت مقایسهٔ روش‌ها بوده است. نتایج این تحقیق حاکی از موفقیت‌آمیز بودن روش‌های پیشنهادی برای ترسیم گره کند، طبل قناس و بعضی گره‌های دیگر، بر روی سطوح صاف و منحنی دوبعدی و سه‌بعدی مثل کره و گنبد است. مزایای روش‌های پیشنهادی چنین هستند: سرعت، دقت، و تنوع نقوش در ترسیم گره‌ها.

۱. مقدمه

نقوش هندسی تزیینی و گره را در بعضی از بناهای ماندگار تاریخی، اشیای فلزی درب و پنجره‌های چوبی، فرش‌ها، گلیم‌ها، و جلد کتاب‌ها می‌توان دید. این نقوش در بناها با کاشی‌کاری، آجر، چوب، گچ، سنگ

۱. این مقالــه برگرفتــه از پایان‌نامهٔ نگارنــدهٔ اول در رشــتهٔ مرمــت بنا و بافت‌های تاریخی اســت، بــا عنوان *تبییــن ویژگی‌هــای ریاضــی نقوش هندسی زوایای شکسته* به راهنمایی نگارنــدگان دوم و ســوم و مشــاورهٔ نگارندهٔ چهارم.

۲. نویســندهٔ مســئول، دانشــجوی دکتــری مرمــت و احیــای بناهــا و بافت‌های تاریخی، دانشکدهٔ حفاظت و مرمت، دانشگاه هنر اصفهان؛
b.hajebi@aui.ac.ir
3. aminpoor@aui.ac.ir
4. m.r.owlia@yazd.ac.ir
5. r.abouei@aui.ac.ir

پرسش‌های تحقیق

۱. تکنولوژی‌های جدید چه کمکی به ترسیم گره‌های متنوع و پیچیده می‌تواند بکند؟

۲. چگونه می‌توان به الگویی دست یافت که با تغییرات دلخواه در ابعاد آن امکان رسم سریع گره‌های مختلف فراهم شود؟

۳. راهکار مرمت گره‌های ابنیهٔ تاریخی که بخش‌هایی از آن فروریخته و از بین رفته چیست؟

و آینه اجرا شده است و بیشتر در نماهای بیرونی مساجد و گنبدها و سردرها و بعضی قسمت‌های داخلی ابنیهٔ تاریخی دیده می‌شود.

طراحی سنتی این نقوش تزیینی را افراد آشنا با ریاضیات و هندسه با پرگار و خط‌کش بر روی کاغذ انجام می‌داده و می‌کشیده‌اند و بعد کاشی‌کارها، بناها و نجارها الگوهایی از آن‌ها تهیه و برای ساخت تزیینات هندسی استفاده می‌کرده‌اند. انجام این کار بسیار مشکل و وقت‌گیر بوده است. نقشه‌ها و الگوها از نسلی به نسلی به صورت موردی منتقل و اطلاعات فنی و محاسبات آن‌ها سینه به سینه منتقل می‌شده است.

در این خصوص مشکلاتی هم ایجاد شده است، مثلاً مفقود شدن اطلاعات فنی و یا ثابت بودن الگو که باعث می‌شده کارهای جدید به‌سختی طراحی شود و یا اصلاً طراحی نشود.

هدف از این مقاله دادن راهکارهای جدید به منظور رفع مشکلات طراحی و بخصوص مرمت نقوش هندسی تزیینی سنتی آسیب‌دیده است. برای انجام این پژوهش بررسی‌های عمیقی در طراحی گره‌های سنتی صورت گرفت و به مطالعهٔ بعضی از رسالات مکتوب قدیمی پرداخته شد. در روش‌های پیشنهادی با بررسی و تدقیق در روابط ریاضی و مثلثاتی پنهان در نقوش تزیینی هندسی و تحلیل آن‌ها و با استفاده از برنامه‌نویسی در نرم‌افزارهای گراس‌هاپر و متلب رسم گره کند طبل قناس انجام گردید که نتیجهٔ آن رضایت‌بخش است. رسم گره با روش‌های پیشنهادی نگارندگان روی سطوح مستوی دوبعدی و سه‌بعدی مانند گنبد عملی است.

روش‌های پارامتریک پیشنهادی رسم نقوشی که تاکنون وجود نداشته و از قبل در ذهن طراح نیست را ممکن می‌کند.

در ادامه، در بخش دوم پیشینهٔ تحقیق بیان می‌شود. در بخش سوم و چهارم، روش‌های پیشنهادی اول و دوم برای ترسیم گره به صورت پارامتریک معرفی می‌شود. در بخش پنجم مقایسهٔ ترسیم روش‌های پیشنهادی ترسیم گره کند طبل قناس انجام می‌گیرد و در بخش ششم به جمع‌بندی و نتیجه‌گیری مقاله پرداخته‌اند.

۲. پیشینهٔ تحقیق

پژوهش‌های انجام‌شده در خصوص نقوش گره در حوزه‌های مختلفی است: در حوزه‌های معناشناسی (بررسی مفاهیم پنهان در نقوش هندسی)، زیباشناسی

(بررسی تناسبات و ارزش‌های زیباشناسی نقوش)، حوزهٔ کاربردی (بررسی کاربردهای مختلف گره در نما، سیستم‌های سازه‌ای)، حوزه‌های ترسیمی (چگونگی ترسیم گره‌ها)، در حوزهٔ محاسبات (برنامه‌نویسی). این مقاله، اختصاص به دو مورد اخیر یعنی در حوزهٔ ترسیم و حوزهٔ برنامه‌نویسی دارد.

منابع موجود دربارهٔ ترسیم نقوش هندسی به سه دستهٔ کلی تقسیم بندی می‌شوند:

الف) کتب و رساله‌های تاریخی،

ب) روش‌های استادکاران سنتی،

پ) روش‌های ریاضی‌دانان و محققین معاصر.

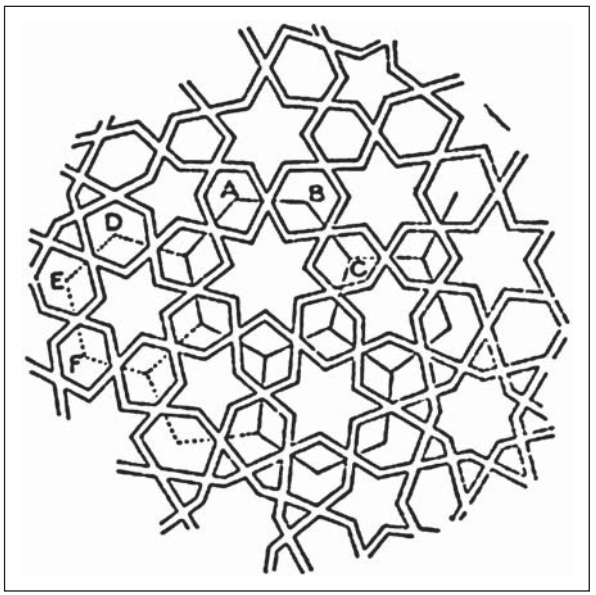
از میان منابع مکتوب می‌توان به رسالهٔ *فی تداخل الاشکال المتشابهه و المتوافقه* از ابو اسحاق ابن عبدالله کوبنانی اشاره کرد. دیگر منبع مکتوب در این باره طومار توپکاپی است. یکی دیگر از این اسناد مجموعهٔ طومارهای میرزا اکبر مربوط به سنت گره‌سازی در ایران است که در حال حاضر در موزهٔ ویکتوریا نگهداری می‌شود. این مجموعه شامل ترسیمات هندسی اجزای مختلف بنا از جمله رسمی‌بندی و گره است.

روش‌های استادکاران سنتی توضیح مشخصی از روش‌های ترسیم گره‌های مختلف است. از این مجموعه آثار می‌توان به روش‌های ترسیم استاد حسین لرزاده، استاد اصغر شعرباف، و استاد محمود ماهرالنقش اشاره کرد. بیشتر این روش‌ها مبتنی بر استفاده از شبکه‌های شعاعی است که ابزارش از قبیل پرگار و خط‌کش است.

روش‌های ریاضی‌دانان و محققین معاصر از اوایل قرن بیستم شروع شده و تا به حال ادامه دارد. هدف این گونه تحقیق‌ها دست‌یافتن به روش‌ها یا الگوریتم‌های کلی است که به کمک آن گره طراحی می‌شده است. در سال‌های اخیر رایانه هم به ابزارهای این دسته از تحقیق‌ها پیوسته است و نقوش را به کمک الگوریتم‌های رایانه‌ای تولید می‌کنند.

اولین تحقیقات معاصر دربارهٔ گره‌ها را می‌توان در آثار هانکین جست‌جو کرد. هانکین در مقالهٔ «طراحی الگوهای هندسی در هنرهای اسلامی» به بررسی نقوش یک حمام ترکی پرداخته است. در این حمام الگوهای ستاره‌ای به‌همراه شبکه‌های کمرنگ ترسیم شده است. این امر وجود شبکهٔ راهنما را برای نقوش حمام اثبات می‌کند. در «ت ۱» بخشی از یک الگوی اربسک که مربوط به گنبد حمام ترکی متصل به قصر فاتح‌پور سیکری نشان داده شده است. در کنار خطوط ضخیم که در اندود گچ کنده‌کاری شدند و داخل گنبد را پوشاندند خراش‌های (خطوط) ضعیفی پیدا شدند که با خطوط AB و BC نشان داده شده‌اند. این خراش‌ها بخشی از چندضلعی هستند، به طوری که در E، D، و F نشان داده شده است. این خراش‌ها ستاره‌های پنج، شش، هفت، و هشت‌پر را، که این الگو را ساخته، احاطه کرده است[۶].

نظریهٔ استفاده از شبکهٔ چندضلعی یک راهنما برای ساختار الگوهای ستاره‌ای و یک نظر مشترک است که تحقیقات بسیاری از محققان را به هم مرتبط می‌کند و ظاهراً جنبهٔ



ت ۱. خطوط راهنمای شبکهٔ نقوش هندسی برای در حمام ترکی، مأخذ:
Hankin, "The Drawing of Geometric Patterns in Saracenic Art", p. 464.

6. E.H. Hankin, "The Drawing of Geometric Patterns in Saracenic Art", p. 464.

تاریخی نیز داشته است. دلیل این ادعا در نقشه‌های موجود در طومار توپکاپی دیده می‌شود.[۷]

هانکین اولین بار این موضوع را مطرح می‌کند که با استخراج دو خط xشکل از میانهٔ اضلاع چندضلعی و برخورد این خطوط با یکدیگر نقوش هندسی حاصل می‌شود. هانکین با یک مثال نشان می‌دهد که خطوط برآمده از میانهٔ اضلاع هشت‌ضلعی با چه زاویه‌ای نسبت به اضلاع آن باید قرار بگیرند. ابتدا زمینه با هشت‌ضلعی‌های در تماس (با قالب‌های هشت ضلعی) پر می‌شوند. مهم است دو خطی که از مرکز یال می‌گذرد، با چه زاویه‌ای گذر کند. بهترین نتیجه زمانی فراهم می‌شود که هرکدام از خطوط موازی با یک قطر هشت‌ضلعی کشیده شود. ابتدا خطوطْ میانهٔ اضلاع هشت ضلعی را به هم متصل می‌کند، مثل TU، سپس خطی موازی قطر هشت‌ضلعی از مرکز یال می‌گذرد تا خط اتصال‌دهندهٔ اضلاع (TU) را در نقطهٔ E قطع کند. از مرکز هشت‌ضلعی یک دایرهٔ G که از نقطهٔ E می‌گذرد رسم می‌شود. بقیهٔ خطوط الگو از نقاطی شبیه E روی محیط دایره قرار می‌گیرند. یک دایرهٔ راهنما ممکن است به صورت مشابه در مربع‌ها کشیده شود که در مربع H نشان داده شده است[۸] (ت ۲).

لی از محققانی است که به بررسی تحقیقات هانکین و دیگران می‌پردازد و تلاش می‌کند تا چگونگی ساخت اجزای شکل‌دهندهٔ گره‌ها را بیان کند.

لی یک ساختار از گره کامل فراهم می‌کند. یک چندضلعی در نظر می‌گیرد. از مرکز O به رأس A وصل می‌کند. به اندازهٔ AM (نصف یال چندضلعی) روی OA جدا می‌کند تا به نقطهٔ C برسد، به طوری که AC با AM برابر است و G از برخورد MM' (خط واصل نقاط میانی چندضلعی) با خطی به دست می‌آید که از C موازی با OM می‌گذرد و چون دو زاویهٔ ACG= و AMG برابرند، درنتیجه CG برابر GM می‌شود (ت ۳).

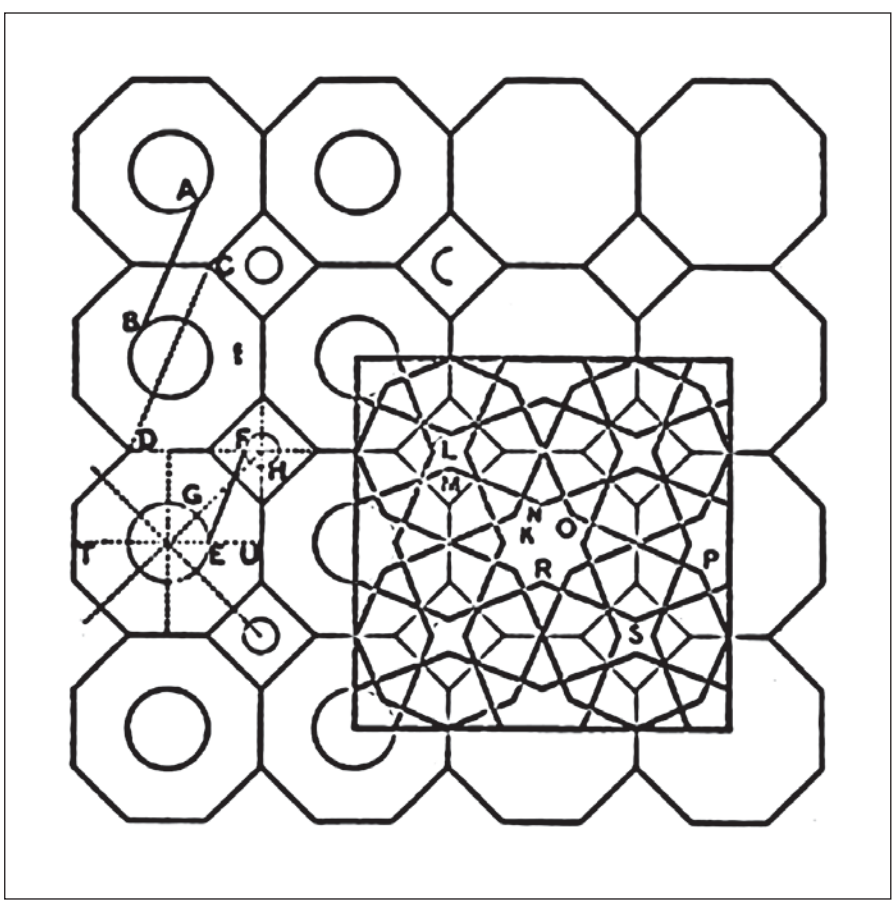
همان‌طور که در «ت ۴» دیده می‌شود، شکل از طریق ۶ پارامتر قابل تفسیر است (n, r, s, θ, h, φ). پارامترهای n و r و s نماد تعداد اضلاع چندضلعی، شعاع دایرهٔ محیطی، و تعداد لایه‌های داخلی شکل هستند و در همهٔ طرح‌هایی کاربرد دارند که از طریق مسیر تولید می‌شوند.

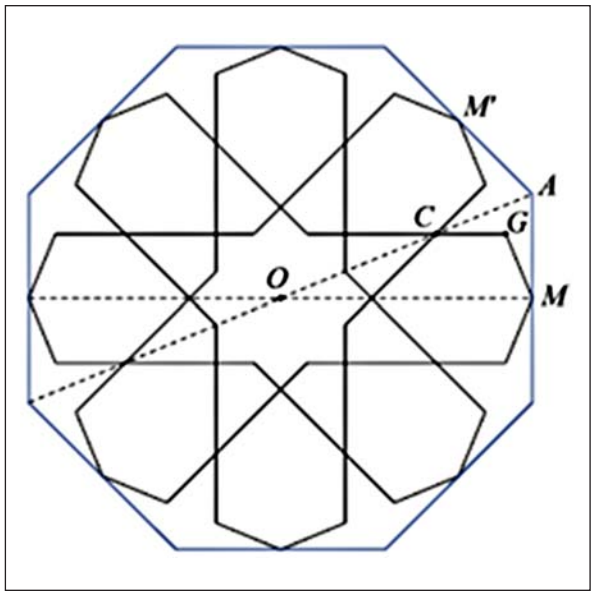
نقطهٔ G نقطه‌ای است با ارتفاع h بالای خط OM، به طوری که ∠GMA =θ، نقطهٔ دوم از طریق تشکیل زاویهٔ φ بین خط برآمده از نقطهٔ G و افق به دست می‌آید. این پارامترها را می‌توان با جانشینی θ با π/n بدین‌گونه تفسیر کرد: $n,r,s,\frac{\pi}{n},h,\varphi$ (ت ۴).[۹]

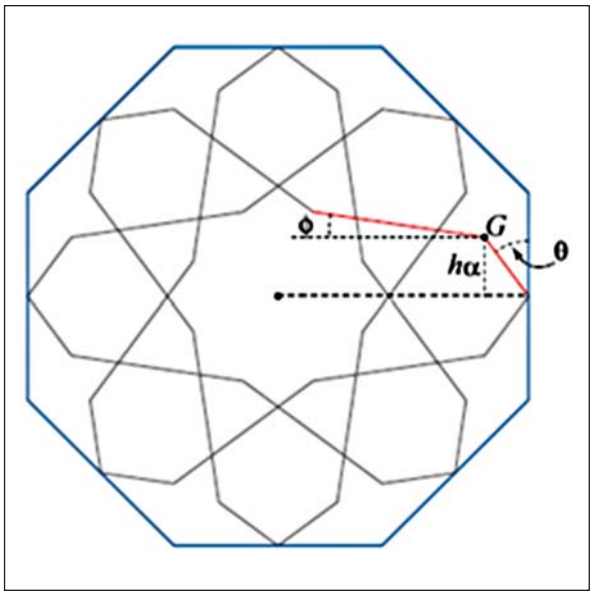
تأثیرات تغییر پارامترهای φ، θ و h در قالب چند نمونه نشان

۷. نک: گلرو نجیب اوغلو، *هندسه و تزیین در معماری اسلامی*.
8. Hankin, ibid, p. 465.

ت ۲. تعیین خطوط vشکل برآمده از میانهٔ اضلاع هشت‌ضلعی، مأخذ: Hankin, ibid, p. 465.



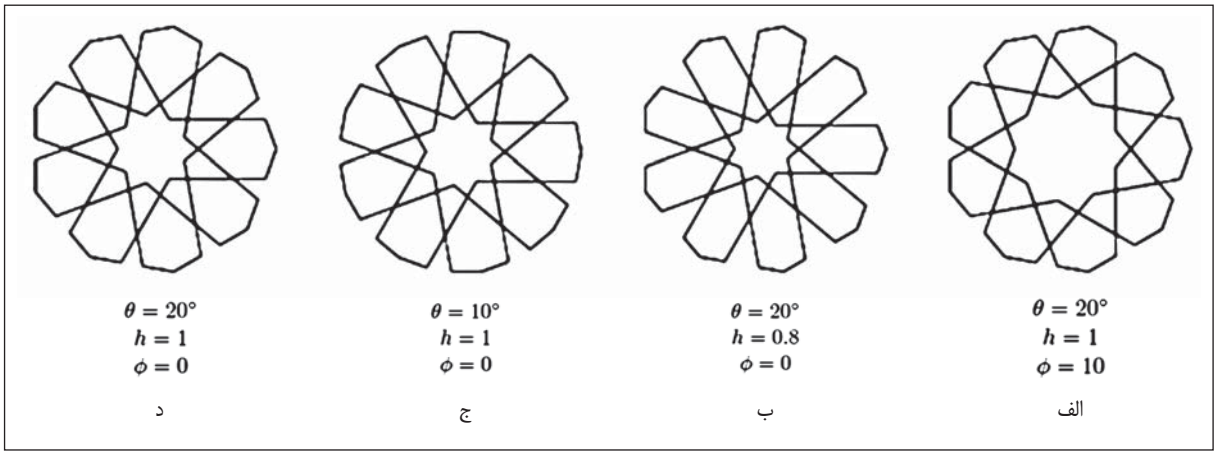




داده شده است. به نظر می‌رسد که، در تبدیل الگوها به یکدیگر الگوهای متنوعی فراهم می‌شود (ت ۵).

یکی دیگر از پژوهشگران غربی کریگ کاپلان است. وی در نخستین پژوهش خود در سال ۲۰۰۰ الگویی محاسباتی را بر پایهٔ تلاش‌های پیشین لی عرضه می‌کند که بر اساس آن «شبکهٔ چندضلعی‌های در تماس» با عناصر لی به الگوی گره تبدیل می‌شود. کاپلان همچنین به توسعهٔ روش هانکین می‌پردازد و آن را الگوی ستارهٔ اسلامی می‌نامد. از برون‌دادهای این‌گونه پژوهش‌ها نرم‌افزار تاپرات[۱۰] است که کاپلان در سال ۲۰۰۲ میلادی طراحی کرده است.[۱۱]

بودنر از دیگر پژوهشگرانی است که تلاش دارد روشی را، بدون در نظرگرفتن شبکهٔ چندضلعی‌های در تماس در پس‌زمینهٔ



۹. نک:
A.J. Lee, "Islamic Star Patterns".
10. Taprat
۱۱. نک:
C.S. Kaplan, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*.

ت ۳ (بالا، راست). نمونه‌ای از ساختار لی، مأخذ:
Lee, "Islamic Star Patterns".
ت ۴ (بالا، چپ). نمونه‌ای از ساختار لی، مأخذ: ibid.
ت ۵ (پایین). نمونه‌های گره ساخته‌شده با استفاده از تکنیک لی. در هر نمونه n=9, r=1, s=3 است و تأثیر φ، θ و h در نمونه‌های مختلف دیده می‌شود، مأخذ:
Kaplan, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, p. 66.

طرح عرضه کند. بودنر به بررسی و تحلیل گره دوشمسه‌ای نه و دوازده نقطه‌ای موجود در طومار تاشکند می‌پردازد.[۱۲]

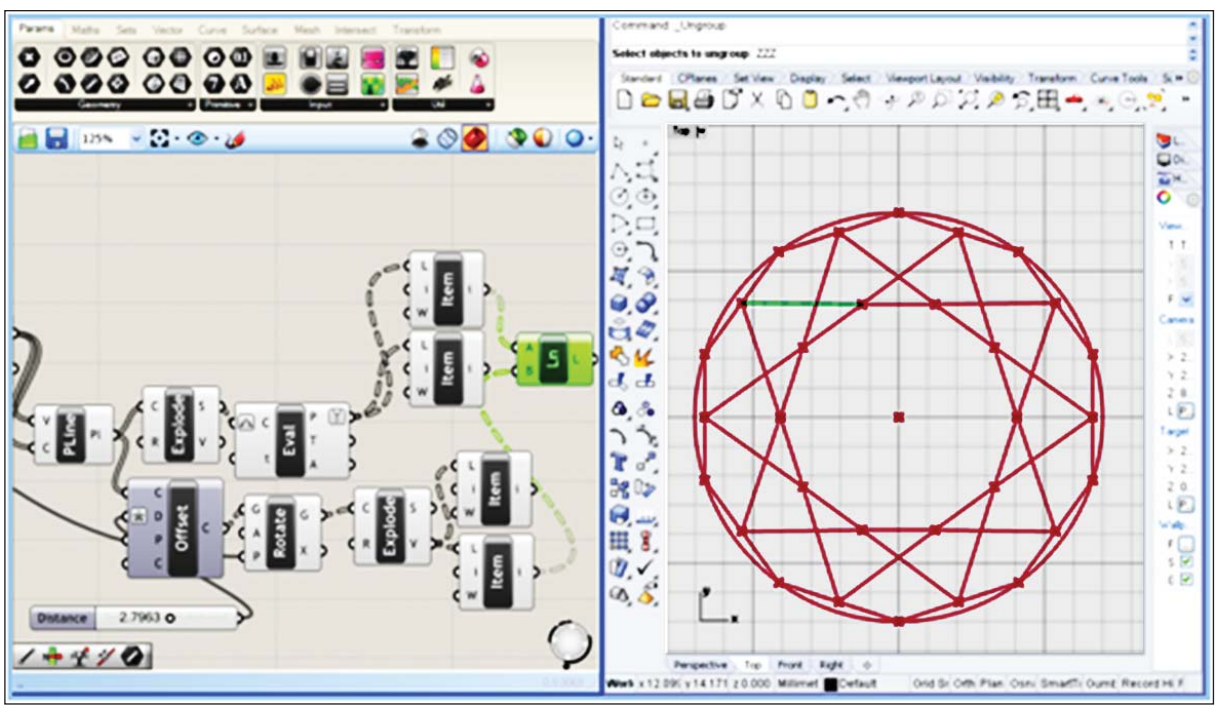
در روش‌های موجود سعی شده الگویی خاص به روش مشخصی رسم شود و کمتر به پارامتریک بودن روش‌ها توجه می‌شود. در روش‌های پیشنهادی سعی می شود با گرامر اشکال به زبان ریاضی اشکال متنوعی از یک گرامر به دست آید. اشکال متنوعی که با تغییر چند پارامتر به دست می‌آید. در این بخش از مقاله، به ترسیم یک نمونهٔ موردی، به طور مثال گره کند طبل قناس، با روش‌های پیشنهادی پارامتریک، پرداخته می‌شود. با روش سنتی موجود و روش‌های پیشنهادی اول و دوم ترسیم این گره انجام می‌شود. سپس با تعیین معیارهایی به مقایسهٔ این روش‌ها می‌پردازیم.

۳. روش پیشنهادی اول

ما برای ترسیم گره کند طبل قناس، به صورت پارامتری، ابتدا الگوریتم آن را در اضافه‌ابزار گراس‌هاپر مربوط به نرم‌افزار و زبان برنامه‌نویسی تصویری راینو نوشته‌ایم. با این‌کار این امکان فراهم می‌آید که بتوان نقوش را بر اساس قواعد و الگوهای جاری آن‌ها ترسیم و به بیان دیگر آن‌ها را به صورت پارامتریک تعریف کرد.

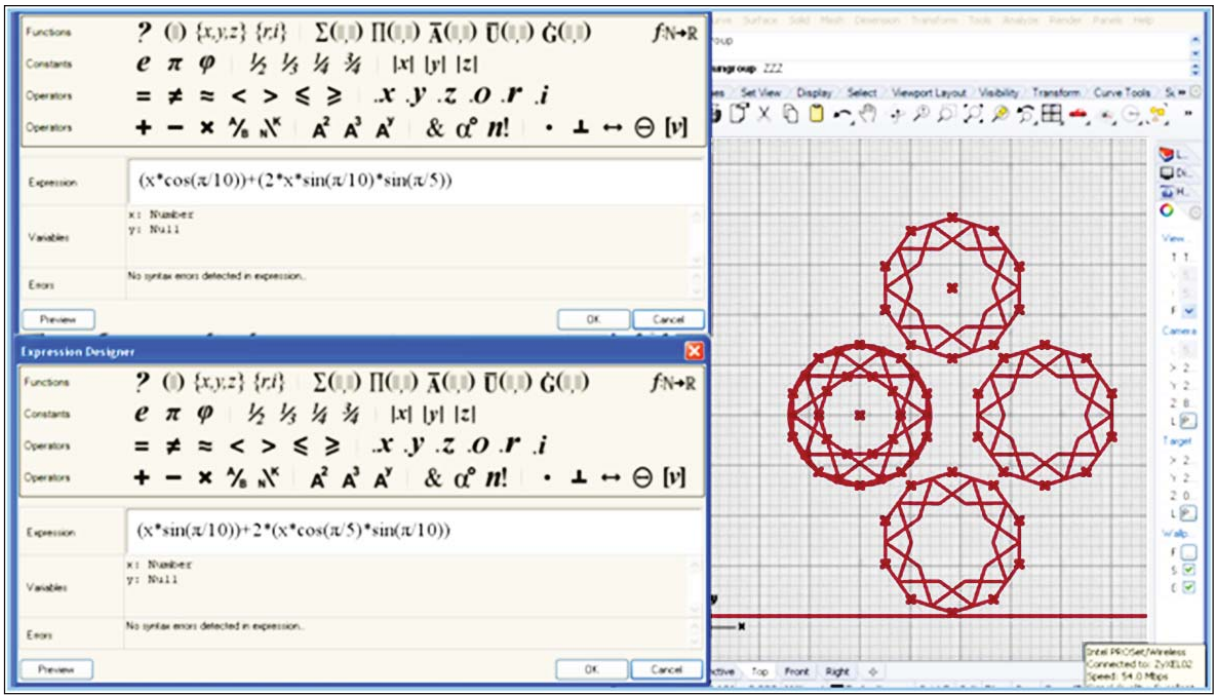
ابتدا نقطه‌ای مبنا در نظر گرفته می‌شود سپس دایره‌ای به مرکز نقطهٔ مورد نظر و شعاع متغیر رسم می‌شود. در ادامه دایرهٔ مورد نظر به قسمت‌های مساوی تقسیم می‌شود. نقاط تقسیم‌شده نسبت به مرکز دایره می‌چرخد و سپس نقاط با دستور «پلی‌لاین (چندخطی)» به هم متصل می‌شود.

در مرحلهٔ بعد خط‌های حاصل از «پلی‌لاین (چند خطی)» یک بار با دستور «آفست (متوازی)» به صورت چندضلعی موازی کشیده می‌شود و با دستور «اِوَل (تعیین مقادیر مشخص روی شکل» وسط اضلاع چندضلعی مشخص می‌شود. با دستور آیتم،



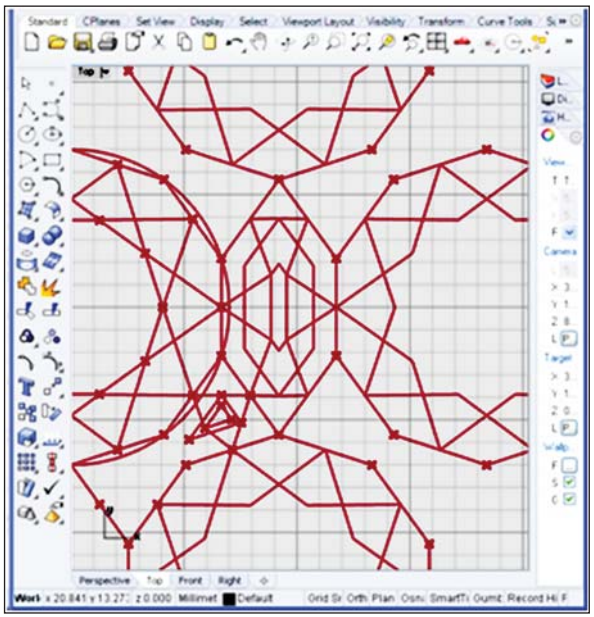
ت ۶. اتصال میانهٔ اضلاع چندضلعی بزرگ‌تر به نقاط اضلاع چندضلعی آفست (متوازی) شده، ترسیم: بیتا حاجبی.

۱۲. نک:
B.L. Bodner "Bourgoin's 14-Pointed Star Polygon Designs".

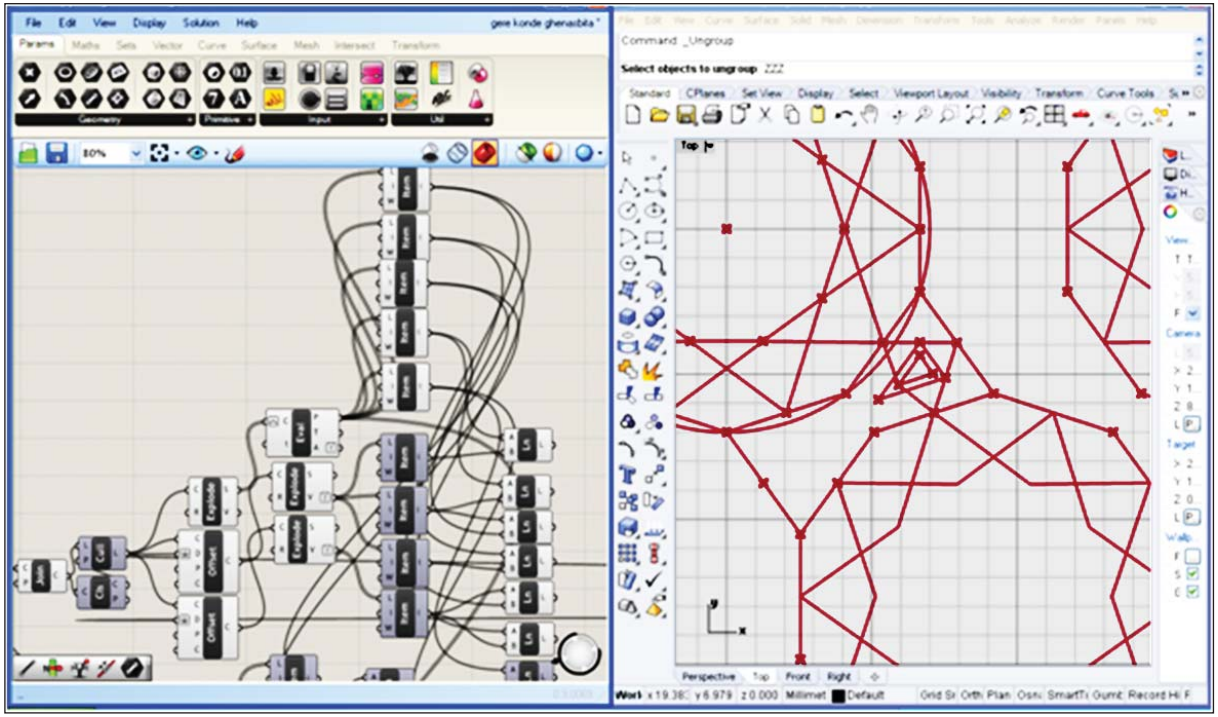


نقاط حاصل شماره‌گذاری می‌شود و با دستور «لاین (خط)» نقاط میانهٔ اضلاع چندضلعی بزرگ‌تر به نقاط چندضلعی «آفست (متوازی)»شده به هم متصل می‌شود (ت ۶).

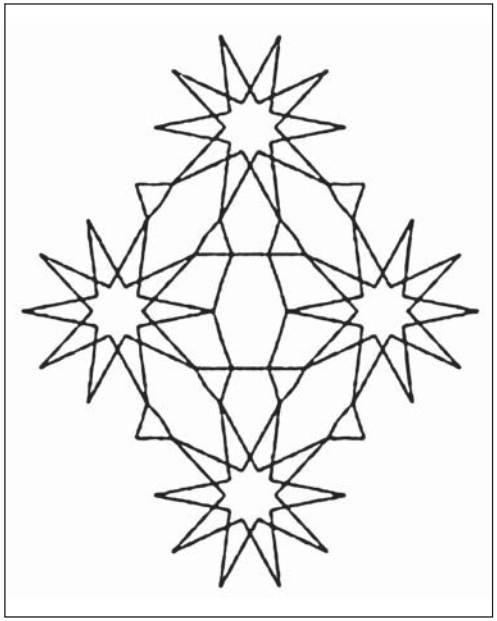
مختصات نقاط مرکزی چهار شمسهٔ دیگر را نسبت به نقطهٔ مرکزی اولیه محاسبه می‌کنیم و آن را بر حسب شعاع دایره به صورت پارامتری می‌نویسیم (ت ۷). بعد از این که چهار شمسه رسم شدند، نقاطی از ده‌ضلعی محیطی شمسه‌ها که مجاور یکدیگرند و از اتصالشان یک گیوه حاصل می‌شود را با دستور «لاین (خط)» به هم متصل می‌کنیم و با دستور «جوین (اتصال)» به صورت یک گیوهٔ پیوسته در می‌آوریم. سپس شکل گیوهٔ مورد نظر را دو بار با دستور «آفست (توازی)» به صورت گیوهٔ موازی می‌کشیم. نقاط میانهٔ اضلاع شکل گیوهٔ اولیه را به نقاط شکل‌های «آفست (توازی)»شده متصل می‌کنیم (ت ۸). در پایان شکل شش‌ضلعی ایجادشده بین چهار شمسه را آفست

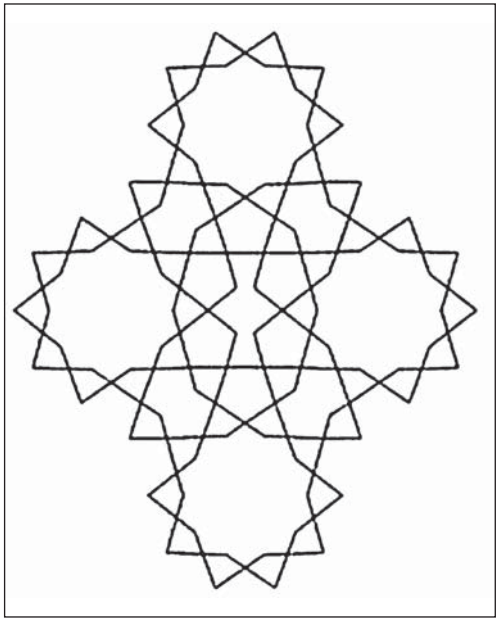


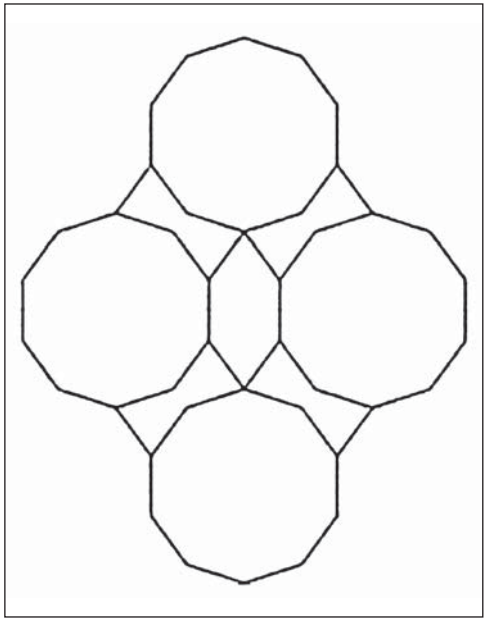
ت ۷ (بالا). محاسبهٔ نقطهٔ مرکزی شمسه‌های اطراف نسبت به نقطهٔ مرکزی شمسهٔ اولیه، ترسیم: ب. حاجبی.
ت ۸ (پایین). اتصال نقاط گیوهٔ بین ده‌ضلعی محیطی بر شمسه‌ها، ترسیم: بیتا حاجبی.



ت ۹ (بالا). اتصال نقاط سرمه‌دان بین ده‌ضلعی محیطی بر شمسه‌ها، ترسیم: ب. حاجبی.
ت ۱۰ (پایین، راست). شبکهٔ محیطی گره کند طبل قناس، ترسیم: ب. حاجبی.
ت ۱۱ (پایین، میان). گره کند طبل قناس ایجاد شده با میزان آفست ۲/۵، ترسیم: ب. حاجبی.
ت ۱۲ (پایین، چپ). شکل ایجاد شده با میزان آفست ۴/۵، ترسیم: بیتا حاجبی.







می‌کنیم و نقاط میانهٔ اضلاع شش‌ضلعی را به نقاط آفست‌شده متصل می‌کنیم (ت ۹).

شکل نهایی حاصل از الگوریتم نوشته‌شده در گراس‌هاپر به صورت «ت ۱۱» با محیط «ت ۱۰» است که با تغییر متغیر (میزان آفست) شکل به صورت (شکل ۱۲) درمی‌آید.

۴. روش پیشنهادی دوم

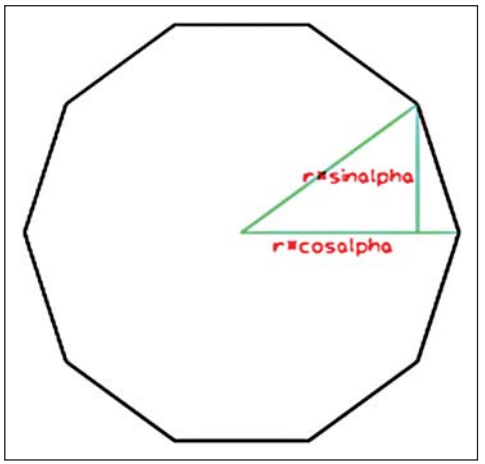
در روش پیشنهادی دوم به برنامه‌نویسی در محیط نرم‌افزار «متلب»[۱۳] می‌پردازیم. متلب نرم‌افزاری است که قابلیت‌های ویژه‌ای در کدنویسی برای رشته‌های فنی و ریاضی دارد و تاکنون چندان مورد توجه معماران نبوده است. به این صورت برنامه‌نویسی با نرم‌افزار متلب کمی سخت‌تر است، اما درجهٔ آزادی را برای ترسیم انواع شکل‌ها و مدل‌ها بسیار بالا می‌برد و همچنین قابلیت اتصال به سایر نرم‌افزارها و سخت‌افزارها را نیز دارد، به این دلایل در این بخش توجه خود را به این نرم‌افزار ارزشمند معطوف کردیم. در روش دوم، ابتدا شبکهٔ دهضلعی محیطی شکل مورد نظر را با کمک نرم‌افزار متلب رسم می‌کنیم. نقاط شبکهٔ دهضلعی خطی است که نقاط به مختصات $\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} r\cdot\cos(\alpha) \\ r\cdot\sin(\alpha) \end{bmatrix}$ را به هم متصل می‌کند. α برابر با $\frac{(4.180)}{n}$ است که در هر مرحله از ۱ تا n تغییر می‌کند (ت ۱۳).

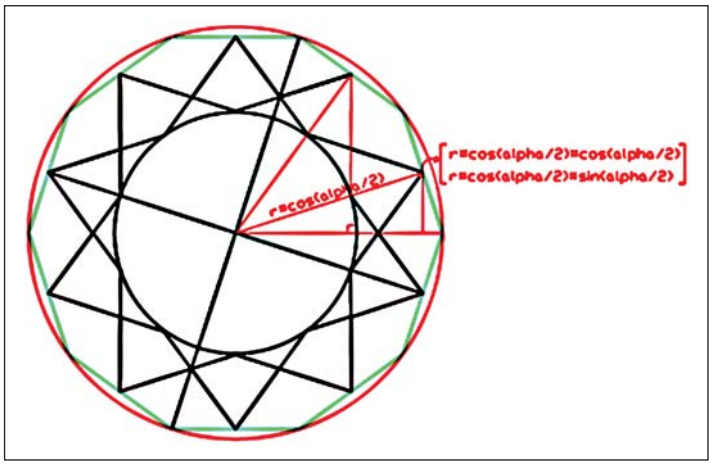
در مرحلهٔ بعدی ترسیم، مختصات نقاط میانی یال‌های دهضلعی محیطی گره، به منزلهٔ نقطهٔ اولیهٔ خطوط تشکیل‌دهندهٔ شمسهٔ میانی گره، باید بر حسب شعاع دایرهٔ محیطی دهضلعی به صورت پارامتری تعیین شوند. «ت ۱۴» نشان‌دهندهٔ رابطهٔ مختصات نقاط میانی یال‌های دهضلعی بر حسب شعاع دایرهٔ محیط بر دهضلعی است. همان‌طور که «ت ۱۵» نشان می‌دهد، مثلث ABC مثلثی متساوی‌الساقین است که دو ضلع AC و BC با هم برابر و هم‌اندازه با شعاع دایرهٔ میانی هستند. زاویه‌های A و B برابر α است. زاویهٔ بین دو ضلع AC و BC برابر با $(\pi\text{-}2\ \alpha)$ است. بنا بر این رابطهٔ r و r_1 از رابطهٔ مثلثاتی (۲) به دست می‌آید.

$$AB^2 = 2r_1^2 - 2r_1^2\cos(\pi - 2\alpha) \quad (۱)$$

$$r^2\cos^2(\frac{\alpha}{2}) = r_1^2(2 - 2\cos(\pi - 2\alpha)) \quad (۲)$$

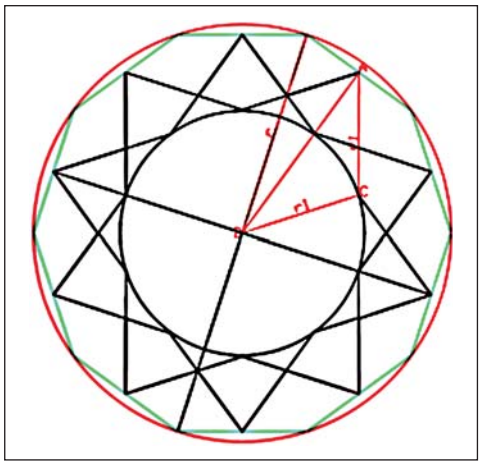
برای اینکه شمسهٔ میانی گره شکل بگیرد، خطوط از میانهٔ اضلاع دهضلعی شروع می‌شود و بر روی دایرهٔ به شعاع r_1 قرار می‌گیرد (ت ۱۶). سپس شکل مورد نظر به اندازهٔ $\frac{\alpha}{2}$ چرخش می‌کند، سپس فاصلهٔ دو دهضلعی محیطی مجاور را نسبت به دهضلعی اولیه بر حسب r به دست می‌آوریم (ت ۱۷). فواصل

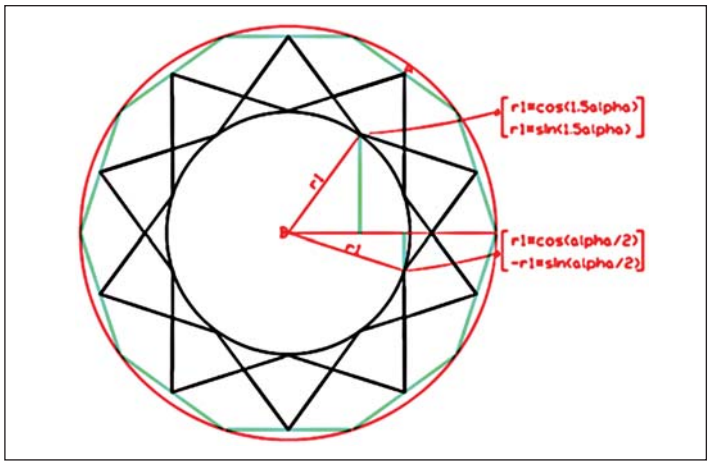




13. MATLAB

ت ۱۳ (راست). مختصات نقاط دهضلعی محیطی بر گره کند طبل قناس، ترسیم: ب. حاجبی.
ت ۱۴ (چپ). تعیین مختصات نقاط مرکزی یال‌های دهضلعی منتظم به عنوان نقطهٔ اولیه‌ی تشکیل دهنده‌ی شمسه، ترسیم: بیتا حاجبی.





افقی EH و EG و فاصلهٔ عمودی FH بر حسب r به صورت رابطهٔ ۳ تا ۵ محاسبه می‌شود:

$$EG = \left(2r\cos(\frac{\alpha}{2})\right) + \left(4r\sin(\frac{\alpha}{2})\sin(\alpha)\right) \quad (۳)$$

$$EH = \left(\frac{EG}{2}\right) \quad (۴)$$

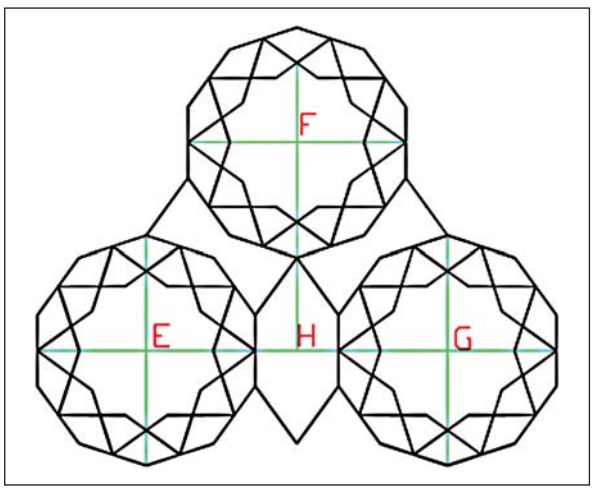
$$FH = \left(2r\sin(\frac{\alpha}{2})\right) + \left(4r\cos(\frac{\alpha}{2})\sin(\alpha)\right) \quad (۵)$$

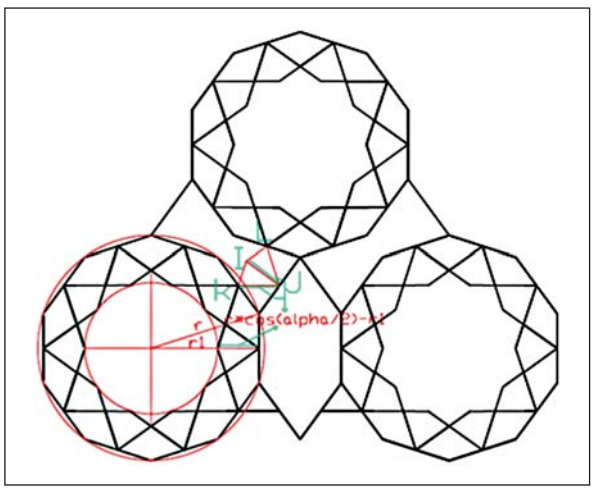
در «ت ۱۸» سه ضلع LJ و IJ و KJ با هم برابرند. از آنجایی که در مثلث IJK دو ضلع IJ و KJ برابرند، ضلع KI در این مثلث از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$KI^2 = 2KJ^2 - 2KJ^2\cos(\alpha) \quad (۶)$$

$$KJ = r\cos\frac{\alpha}{2} - r_1 \quad (۷)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-2\cos(\alpha))(r\cdot\cos(\frac{\alpha}{2}))^2\cos(2\alpha) + x_k \\ (2-2\cos(\alpha))(r\cdot\cos(\frac{\alpha}{2}))^2\sin(2\alpha) + y_k \end{bmatrix} \quad (۸)$$





ت ۱۵ (بالا، راست). تعیین رابطهٔ بین شعاع دایرهٔ محیطی گره و دایرهٔ میانی شمسه،
ترسیم: ب. حاجبی.
ت ۱۶ (بالا، چپ). تعیین مختصات نقاط شمسه که روی دایرهٔ میانی واقعند،
ترسیم: ب. حاجبی.
ت ۱۷ (پایین، راست). قرارگیری ده ضلعی‌های مجاور با مرکزیت F و G نسبت به ده ضلعی اولیه با مرکزیت E، ترسیم: ب. حاجبی.
ت ۱۸ (پایین، چپ). به‌دست‌آمدن KJ بر حسب r و r_1،
ترسیم: بیتا حاجبی.

سپس با داشتن طول KI و داشتن زاویهٔ IKJ مختصات نقطهٔ I به دست می‌آید.

بعد از مشخص شدن مختصات نقطهٔ I، می‌توان قرینهٔ نقطهٔ مورد نظر را نسبت به محور تقارن به دست آورد. برای این کار، ابتدا زاویهٔ محورهای تقارن با افق را به دست می‌آوریم. سپس نقطهٔ مورد نظر و محور را به اندازهٔ زاویهٔ مورد نظر در جهت منفی زاویهٔ تبدیل چرخش (جهت عقربه‌های ساعت) می‌چرخانیم (ت ۱۹) تا محور مختصات بر روی محور عرض مختصات دکارتی قرار گیرد. برای این کار از ماتریس چرخش کمک گرفته می‌شود.

رابطهٔ تبدیل چرخش به شکل رابطهٔ (۹) است.

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \end{bmatrix} = R(-\theta) \begin{bmatrix} x_{old} \\ y_{old} \end{bmatrix} \quad (۹)$$

که در آن $R(-\Theta)$ ماتریس تبدیل چرخش، x_{old} ، y_{old} مختصات نقطهٔ اولیه و x_{new} ، y_{new} مختصات نقطهٔ ثانویه پس از چرخش است. ماتریس تبدیل چرخش در حالت کلی برای چرخش به میزان Θ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت (ت ۲۰) برابر $R(\Theta)$ است که به صورت رابطهٔ (۱۰) است.

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

به این صورت ماتریس تبدیل چرخش با زاویهٔ چرخش منفی (در جهت عقربه‌های ساعت) به صورت رابطهٔ (۱۱) در می‌آید.

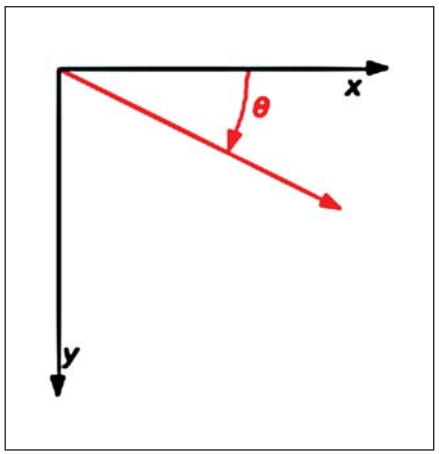
$$R(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (۱۱)$$

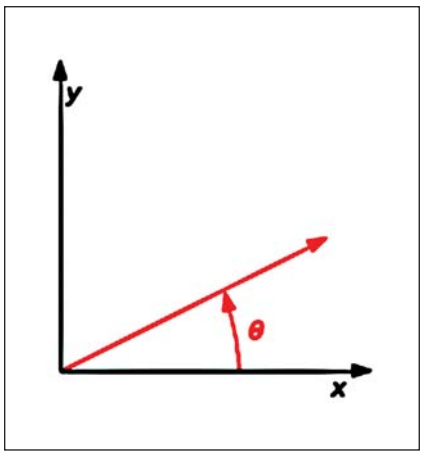
پس از اعمال این چرخش، برای به دست آوردن قرینهٔ شکل، باید قرینهٔ نقطهٔ مورد نظر نسبت به محور عرض (xها) به دست آید. بنا بر این از تبدیل رابطهٔ (۱۲) استفاده می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{old} \\ y_{old} \end{bmatrix} \quad (۱۲)$$

که در آن $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ماتریس تبدیل عکس نسبت به محور عرض‌ها، x_{old} و x_{new} و y_{new} مختصات نقطهٔ اولیه و مختصات نقطهٔ ثانویه پس از اعمال تبدیل است.

پس از انجام این تبدیل نیاز است که مجدداً نقطه به اندازهٔ Θ توسط ماتریس تبدیل چرخش $R(\Theta)$ چرخانده شود تا محور قرینهٔ نقطه نسبت به محور مورد نظر، که خطی با زاویهٔ Θ است، به دست آید. به بیان دیگر در اینجا به منظور سهولت در برنامه‌نویسی، محور خط مورب را روی محور مختصات می‌چرخانیم تا عملیات معکوس‌سازی در برنامه‌نویسی با سهولت انجام شود. چرا که راه‌حل ریاضی آن به این‌گونه است که ابتدا باید رابطهٔ خط عمود گذرنده از نقطهٔ اولیه به دست آید، سپس نقطهٔ قطع‌شده با دو خط، با استفاده از معادلات آن دو خط، محاسبه شود و درنهایت از رابطهٔ جمع دو نقطه تقسیم بر دو (که محل برخورد دو خط است) استفاده شود تا نقطهٔ عکس نسبت به این خط به دست آید که در برنامه‌نویسی محاسبات را سخت‌تر می‌کند. به طور خلاصه رابطهٔ کلی برنامه‌نویسی از نقطهٔ اولیه تا رسیدن به نقطهٔ عکس آن نسبت به خطی با زاویهٔ Θ در رابطهٔ (۱۳) خلاصه می‌شود. همان‌گونه که مشاهده می‌شود کل رابطه با ماتریس بیان شده که مزیت بسیار مهمی در نرم‌افزار متلب (که همهٔ محاسبات آن با ماتریس‌ها است) به حساب می‌آید.





ت ۱۹ (راست). زاویهٔ چرخش در ماتریس تبدیل چرخش مثبت.
ت ۲۰ (چپ). زاویهٔ چرخش در ماتریس تبدیل چرخش منفی.

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \left(\left(\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{old} \\ y_{old} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)^T \quad (۱۳)$$

که در آن، x_{old} و y_{old} مختصات نقطهٔاولیه و x_{new} و y_{new} مختصات نقطهٔ معکوس آن نسبت به خط با زاویهٔ Θ از محور عرض مختصات دکارتی است. درنهایت شکل حاصل با n=10 به صورت «ت ۲۱» است و با تغییر پارامتر به ازای n=20 «ت ۲۲» حاصل می‌شود.

با استفاده از نرم‌افزار متلب و روش‌های گفته‌شده، گره کند طبل قناس به شعاع دلخواه در «ت ۲۱» رسم شده است. برای ترسیم این شکل ابتدا دهضلعی سمت چپ پایین به مرکز (0,0) ترسیم شد و سپس با استفاده از مختصات مراکز دو گره دیگر به آنجا نیز منتقل شده است، یک گره در بالا و دیگری در سمت راست گره اول. برای خطوط مابین دهضلعی سمت چپ و دهضلعی بالایی از روش نقطهٔ برخورد با تابعی که در متلب ساختیم استفاده شد. سپس خط مابین مراکز این دو گره (دهضلعی دست راستی و دهضلعی بالایی) به دست آمد و بر اساس روش چرخش ذکرشده در بالا، سایر خطوط متقارن ترسیم گشت. با استفاده از خط عمودی که از مرکز دهضلعی بالایی می‌گذشت و روش چرخش ذکرشده، تمامی گره‌های متقارن نسبت به محور عمود گذرنده از مرکز دهضلعی بالایی ترسیم شده‌اند. این خطوط همان خطوط گذرندهٔ مابین دهضلعی بالایی و دهضلعی سمت راست هستند. از همین روش برای رسم گره‌های بیست‌ضلعی با استفاده از نرم‌افزار متلب استفاده شده است که در «ت ۲۲» مشاهده می‌شود.

۵. مقایسهٔ روش‌های پیشنهادی ترسیم گره کند طبل قناس

در ارزیابی روش‌های ترسیم چند معیار مقایسه می‌شود:

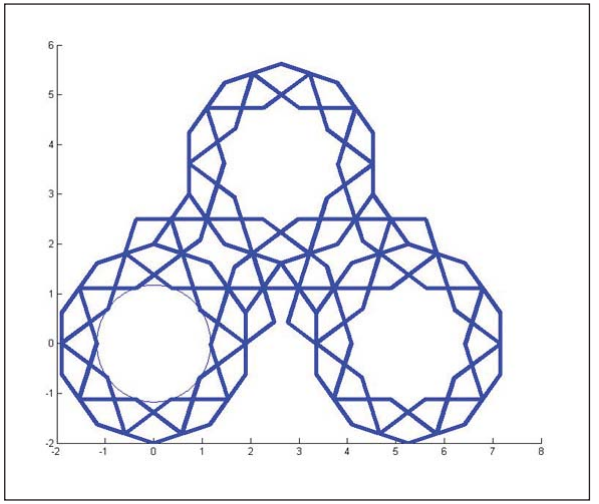
ـ امکان ویرایش شکل ترسیم‌شده پس از ترسیم،

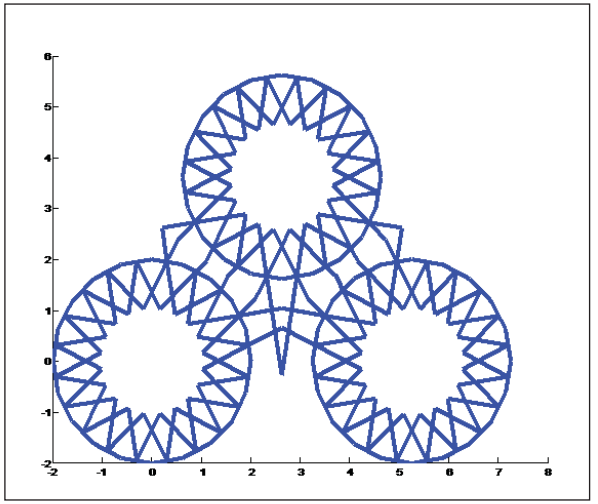
ـ مستقیم بودن پارامترها،

ـ امکان ایجاد شکل‌های متنوع از یک دستور،

ـ زمان محاسبات در هر بار ترسیم،

ـ پیچیدگی محاسبات،

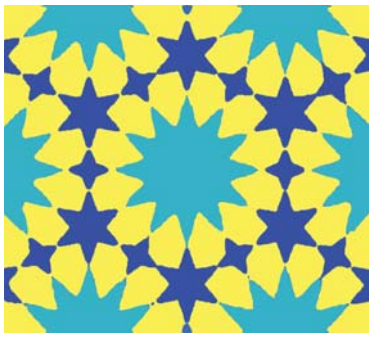




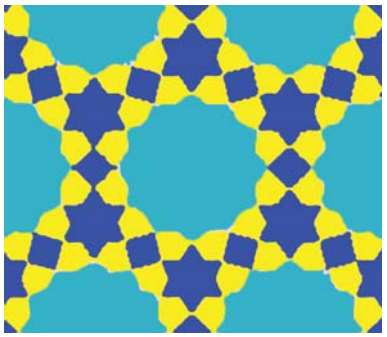
ت ۲۱ (راست). رسم گرهٔ کند طبل قناس با استفاده از برنامه نویسی در محیط متلب، ترسیم: ب. حاجبی.

ت ۲۲ (چپ). رسم گرهٔ حاصل از الگوریتم با قرار دادن n=20، ترسیم: بیتا حاجبی.

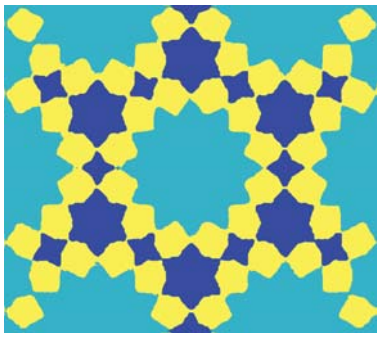
روش پیشنهادی اول در محیط گراس‌هاپر	روش پیشنهادی دوم در محیط متلب
امکان ویرایش با جابه‌جایی نقطهٔ برخورد از میانه به مکان دیگر و یا تبدیل یک نقطه به دو نقطه روی یال چندضلعی‌ها هست (مزیت).	امکان ویرایش و تغییر خطوط با تعریف خطوط به صورت معادلهٔ جدید هست (مزیت).
امکان تعریف حلقه نیست (محدودیت).	امکان چرخش خطوط گره به تعداد اضلاع در هر مرحله با تعریف حلقه در برنامه‌نویسی هست (مزیت). در این محیط برای تکرار کردن یک یا چند دستورالعمل از حلقهٔ تکرار استفاده می‌شود.
پارامترها غیر مستقیم هستند. میزان آفست چند ضلعی داخلی باید تنظیم شود (محدودیت).	پارامترها مستقیم هستند و نیازی به محاسبات پیچیده نیست و با دانستن طول دهانه و تعداد اضلاع شمسه می‌توان شکل را به دست آورد (مزیت).
امکان ایجاد اشکال مختلف با تغییر میزان فاصلهٔ نقاط میانی یال‌های شبکهٔ چندضلعی تا چندضلعی‌های درونی که «آفست (متوازی)» شده هست (مزیت).	امکان ایجاد اشکال مختلف با تغییر میزان طول دهانه و تعداد اضلاع شمسه (n) هست (مزیت).



آفست اول: ۱/۶ آفست دوم: ۱/۱



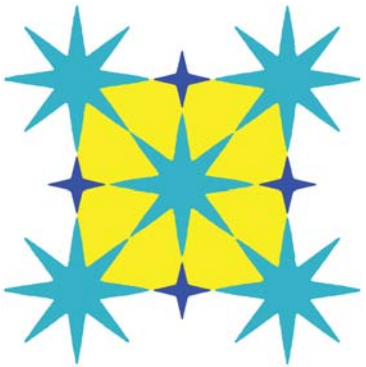
آفست اول: ۰/۶ آفست دوم: ۰/۹



آفست اول: ۱/۳ آفست دوم: ۰/۹

آفست اول: ۲/۷ آفست دوم: ۱/۸

آفست اول: ۱/۸ آفست دوم: ۱/۵



آفست اول: ۵ آفست دوم: ۲/۳

ت ۲۳ (بالا). جدول مقایسهٔ قابلیت دو روش ترسیم گره پیشنهادی نگارندگان.
ت ۲۴ (میان). الگوی گره با شمسهٔ دوازده با آفست‌های متفاوت، ترسیم: ب. حاجبی.
ت ۲۵ (پایین). الگوی گره با شمسهٔ هشت با آفست‌های متفاوت، ترسیم: بیتا حاجبی.

ـ امکان ترسیم شکل بر روی زمینه‌های نامتعارف مثل مثلث،
ـ امکان ترسیم شکل بر روی سطوح سه‌بعدی مثل گنبد.

در جدول «ت ۲۳» قابلیت‌های دو روش پیشنهادی با یکدیگر مقایسه می‌شوند. در روش پیشنهادی اول تعیین نوع شبکه‌های چندضلعی و میزان فاصلهٔ نقاط میانی یال‌های شبکهٔ چندضلعی تا چندضلعی‌های درونی که «آفست» شده اهمیت دارد.

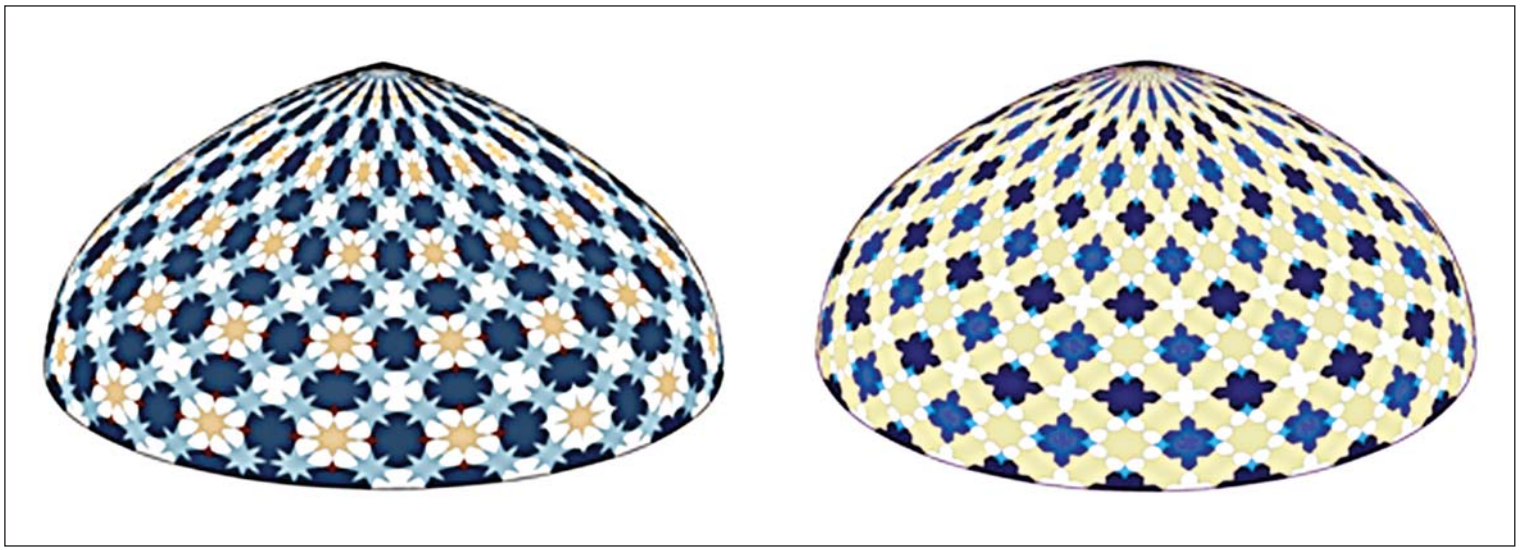
حسن روش پیشنهادی اول امکان ویرایش ترسیم با جابه‌جایی نقطه برخورد از میانه به مکان دیگر و یا تبدیل یک نقطه به دو نقطه روی یال چندضلعی‌ها است. این امکان در روش دوم با تعریف خطوط به صورت معادله‌ی جدید هست.

از قابلیت‌های روش اول این است که امکان ایجاد اشکال در روی سطوح دوبعدی و سه‌بعدی مثل گنبد نیز در آن فراهم است. برای نمونه، اشکال مختلف یک گره با شمسهٔ دوازده و یک گره با شمسهٔ هشت را با استفاده از گراس‌هاپر در سطح دوبعدی با تغییر پارامتر آفست به دست می‌آوریم. برای به‌دست‌آوردن این الگو لازم است ابتدا بر حسب اینکه شمسه دوازده باشد یا هشت، دایره به دوازده یا هشت قسمت مساوی تقسیم شود، سپس نقاط تقسیم‌شده به هم متصل می‌شوند و تشکیل یک دوازده یا هشت‌ضلعی می‌دهند. سپس این چندضلعی‌ها آفست می‌شوند، به علاوه نقطهٔ میانی اضلاع چندضلعی‌ها مشخص می‌شود و به رئوس چندضلعی‌هایی که آفست‌شده متصل می‌شود، با این الگوریتم با تغییر میزان آفست (اول) شکل‌های متنوع حاصل می‌شود. این از خصوصیات یک مدل پارامتریک است. میان اضلاع دوازده‌ضلعی‌ها، شش‌ضلعی‌ها، مربع‌ها، و میان هشت‌ضلعی‌ها مربع‌هایی هست که با اجرای عملیات گفته‌شده ستاره‌هایی در آن‌ها حاصل می‌شود که با تغییر میزان آفست (دوم) شکل‌های متنوع حاصل می‌شود. «ت ۲۴ و ۲۵» به این روش حاصل می‌شود.

برای رسم گره بر روی گنبد نیز نقش، مطابق آنچه برای «ت ۲۵»توضیح داده شد، رسم می‌شود، سپس قوسی دلخواه رسم می‌گردد و با دستور ریوالو[14] حول محور قوس به اندازهٔ ۳۶۰ درجه می‌چرخد و گنبد شکل می‌گیرد. سپس گنبد به قسمت‌های دلخواه در دو محور u و v تقسیم می‌شود. نقش رسم‌شده به

14. revolve

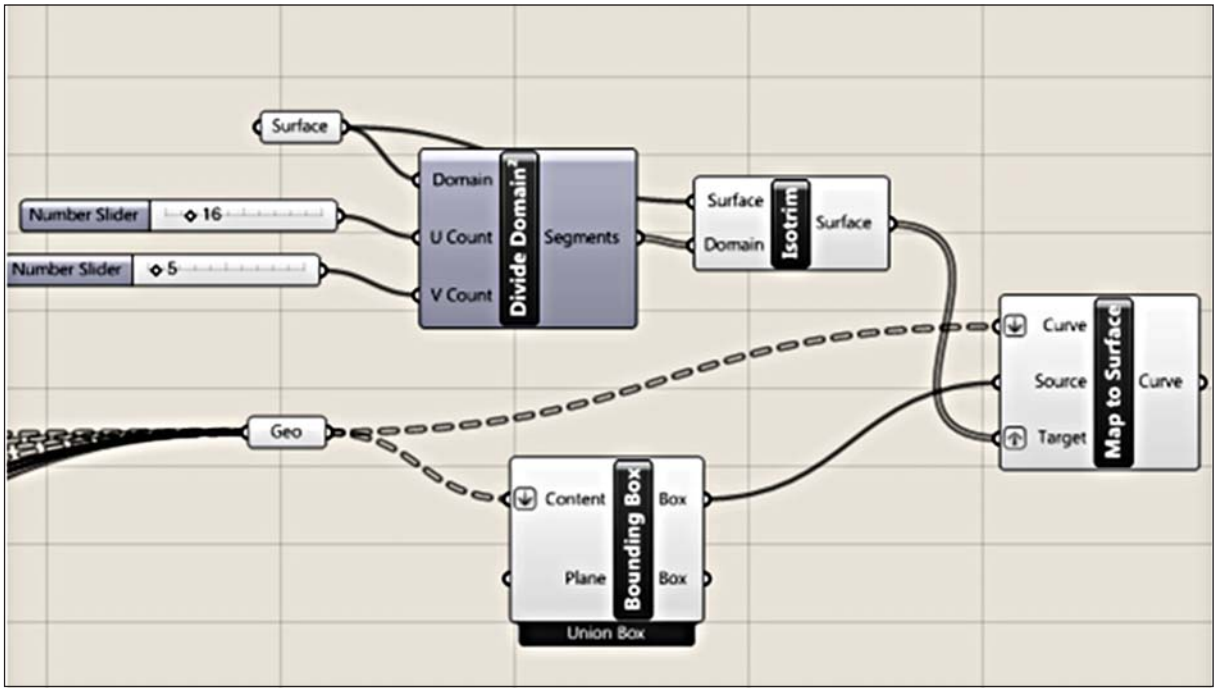
ت ۲۶. الگوی گره با شمسهٔ هشت با آفست‌های متفاوت روی گنبد، ترسیم: بیتا حاجبی.



مثابهٔ منبع[۱۵] به دستور تصویر[۱۶] داده می‌شود. دستورهای بیان‌شده در محیط گراس‌هاپر نوشته می‌شود (ت ۲۶ و ۲۷).

۶. نتیجه‌گیری

برای رسم گره ممکن است نیاز باشد پارامترهای مختلف تغییر کند تا شرایطی حاصل شود که گره مطلوب ترسیم شود. در روش‌های غیر پارامتریک سنتی برای هر بار ترسیم یک گره با چند پارامتر باید همهٔ محاسبات از ابتدا چندین بار انجام شود، به طوری که تغییر پارامترها، بخصوص در سطوح غیر مستوی، کاری بسیار دشوار و پیچیده است. در حالی‌که در روش‌های پیشنهادی ما با یک بار برنامه‌نویسی، با تغییر پارامترها در کمتر از یک ثانیه، گره جدید رسم می‌شود و به این صورت می‌توان گره رسم‌شده را با گره مورد مرمت تطبیق داد و از روی آن قسمت‌های آسیب‌دیدهٔ گره را مرمت کرد. در این تحقیق نشان داده شد که دو روش پیشنهادی ما قابل اجرا هستند و دقت و سرعت ترسیم گره را بالا می‌برند، به طوری که مرمت گره آسیب‌دیده را بخصوص در مدل‌های سه‌بعدی ساده‌تر می‌کند و این مزیت اصلی روش‌های پارامتریک نسبت به روش‌های معمول است. روش‌های پیشنهادی ما روی سطوح مستوی، کره، و گنبد آزمایش شده و نتیجه مثبت است. در مقایسهٔ دو روش پیشنهادی جدید می‌توان گفت در روش اول از نرم‌افزار گراس‌هاپر استفاده شده و انجام کار برای کاربر ساده و راحت است. در روش دوم به خاطر استفاده از نرم‌افزار متلب درجهٔ آزادی در برنامه‌نویسی بیشتر هست و به این دلیل رسم اشکال با تنوع بیشتر امکان‌پذیر است و از مزیت‌های روش‌های پیشنهادی نسبت به روش‌های معمول سنتی می‌توان به این موارد اشاره کرد: سرعت، دقت، تنوع در ایجاد اشکال، و نوآوری در خلق نقوشی که قبلاً در ذهن ما و روی کاغذ امکان‌پذیر نبوده است.



ت ۲۷. دستور ترسیم گره در روی گنبد در محیط گراس‌هاپر، ترسیم: بیتا حاجبی.

15. source
16. map

منابع و مآخذ

رئیس‌زاده، مهناز و حسین مفید. *احیای هنرهای از یاد رفته*، تهران: مولی، ۱۳۸۹.

شعرباف، اصغر. *گره و کاربندی*، تهران: انتشارات سازمان میراث فرهنگی کشور، ۱۳۸۵.

نجیب اوغلو، گلرو. *هندسه و تزیین در معماری اسلامی (طومار طوپقاپی)*، ترجمهٔ مهرداد قیومی، تهران: روزنه، ۱۳۷۹.

Bodner, B.L. "A Nine- and Twelve-Pointed Star Polygon Design of the Tashkent Scrolls", in Reza Sarhangi and Carlo Séquin, (eds.), *Proceedings of Bridges 2011: Mathematics, Art, Architecture, Music, Culture, Conference*, Phoenix: Tesselations Publishing, 2011, pp. 147-154.

_____ . "Bourgoin's 14-Pointed Star Polygon Designs", in Bridges: Mathematical Connections in Art, Music, and Science Conference Proceedings, 2010, pp. 135 - 142.

Hankin, E.H. "The Drawing of Geometric Patterns in Saracenic Art", in *Memoirs of the Archaeological Society of India*, Vol 15, 1925, Government of India.

_____ . "Examples of Methods of Drawing Geometrical Arabesque Patterns", in *The Mathematical Gazette*, No. 12 (1925), pp. 371–373.

_____ . "Some Difficult Saracenic Designs II", in *The Mathematical Gazette,* No. 18, pp.165–168.

_____ . "Some Difficult Saracenic Designs III", in *The Mathematical Gazette*, No 20 (1936), pp. 318–319.

Kaplan, Craig S. *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, PhD dissertation thesis, University of Washington, 2002.

Lee, A.J. "Islamic Star Patterns", in *Muqarnas*, 4 (1995),pp. 182–197.